

# 单元素养测评卷(一)

## 第一章

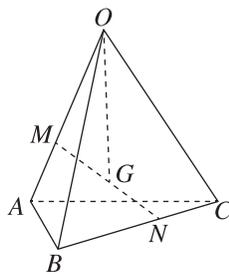
时间:120分钟 分值:150分

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 下列向量中,与向量  $a=(2,-3,1)$  平行的是 ( )

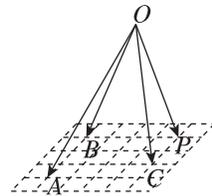
- A.  $(1,1,1)$                       B.  $(-2,3,1)$   
C.  $(-\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3})$                       D.  $(-2,-1,1)$

2. [2024·广东东莞虎门外语学校高二月考] 如图,在四面体  $O-ABC$  中, $M,N$  分别在棱  $OA,BC$  上,且满足  $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NC}$ ,点  $G$  是线段  $MN$  的中点,则  $\overrightarrow{OG}=\quad$  ( )



- A.  $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$   
B.  $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$   
C.  $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$   
D.  $\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

3. 如图,平面  $\alpha$  内的小方格均为正方形,点  $A, B, C, P$  均在平面  $\alpha$  内, $O$  为平面  $\alpha$  外一点,设  $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$ ,则  $m+n$  的值为 ( )



- A. 1                                      B. -1  
C. 2                                      D. -2

4. 已知直线  $l$  的一个方向向量为  $s=(-1,1,1)$ ,平面  $\alpha$  的一个法向量为  $n=(2,x^2+x,-x)$ ,若直线  $l \parallel$  平面  $\alpha$ ,则实数  $x$  的值为 ( )

- A. -2                                      B.  $-\sqrt{2}$   
C.  $\sqrt{2}$                                       D.  $\pm\sqrt{2}$

5. 已知  $a=(3,0,4), b=(-3,2,5)$ ,则向量  $a$  在向量  $b$  上的投影向量是 ( )

- A.  $\frac{11}{25}(-3,2,5)$                       B.  $\frac{11}{38}(-3,2,5)$   
C.  $\frac{11}{25}(3,0,4)$                         D.  $\frac{11}{38}(3,0,4)$

6. [2024·福建师大附中期末] 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中,经过点  $P(x_0, y_0, z_0)$ ,且法向量为  $m=(A, B, C)$  的平面方程为  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ,经过点  $P(x_0, y_0, z_0)$  且一个方向向量为  $n=(\mu, \nu, \omega)(\mu\omega \neq 0)$  的直线  $l$  的方程为  $\frac{x-x_0}{\mu} = \frac{y-y_0}{\nu} = \frac{z-z_0}{\omega}$ . 阅读上面的材料并解决下面的问题:

现给出平面  $\alpha$  的方程为  $3x-5y+z-7=0$ ,经过点  $(0,0,0)$  的直线  $l$  的方程为  $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ ,则直线  $l$  与平面  $\alpha$  所成角的正弦值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$                                       B.  $\frac{\sqrt{10}}{35}$   
C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$                                         D.  $\frac{\sqrt{5}}{7}$

7. 在四面体  $OABC$  中, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ ,  $|\overrightarrow{OC}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{OB}| = 3|\overrightarrow{OA}| = 3, \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DC}$ ,若点  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心,则点  $G$  到直线  $BD$  的距离为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                                       D.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

8. [2024·北理工附中高二期中] 在棱长为2的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, $E$  为  $BC$  的中点,点  $P$  在底面  $ABCD$  上移动,且满足  $B_1P \perp D_1E$ ,则线段  $B_1P$  长度的最大值为 ( )

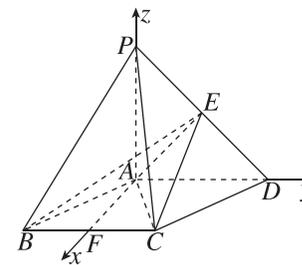
- A. 2                                        B. 3                                        C.  $2\sqrt{2}$                                       D.  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 下列说法正确的是 ( )

- A. 设  $a, b$  是两个空间向量,则  $a, b$  一定共面  
B. 设  $a, b, c$  是三个空间向量,则  $a, b, c$  一定不共面  
C. 设  $a, b$  是两个空间向量,则  $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$   
D. 设  $a, b, c$  是三个空间向量,则  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

10. 在四棱锥  $P-ABCD$  中,底面  $ABCD$  为菱形, $\angle ABC=60^\circ$ ,  $PA \perp$  平面  $ABCD, PA=AC=2, E, F$  分别为  $PD, BC$  的中点,若以  $A$  为原点,以  $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$  的方向分别为  $x, y, z$  轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系  $Axyz$ ,则 ( )



- A. 点  $B$  的坐标为  $(\sqrt{3}, -1, 0)$   
B.  $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$   
C.  $\overrightarrow{BE} = (-\sqrt{3}, 2, 1)$   
D. 平面  $ACE$  的一个法向量为  $n=(1, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$

11. 在正四棱锥  $P-ABCD$  中, $AB=1, PB=2, E$  是  $PC$  的中点. 设正四棱锥  $P-ABCD$  与三棱锥  $E-BCD$  的体积分别为  $V_1, V_2, PB, PC$  与平面  $BDE$  所成的角分别为  $\alpha, \beta$ ,则 ( )

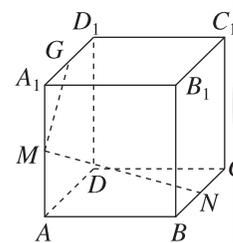
- A.  $PA \parallel$  平面  $BDE$                       B.  $PC \perp$  平面  $BDE$   
C.  $V_1 : V_2 = 4 : 1$                         D.  $\sin \alpha : \sin \beta = 1 : 2$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 若平面  $\alpha$  的一个法向量为  $n=(-\sqrt{3}, 1, 1)$ ,直线  $l$  的一个方向向量为  $a=(\sqrt{3}, 1, 1)$ ,则  $l$  与  $\alpha$  所成角的正弦值为 \_\_\_\_\_.

13. [2024·辽宁葫芦岛协作校高二期中] 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中,点  $M(1,0,3), N(0,2,0)$ ,点  $P$  在  $Ozx$  平面内,且  $PM=PN$ ,请写出一个满足条件的点  $P$  的坐标:\_\_\_\_\_.

14. [2024·深圳外国语学校高二月考] 如图,已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为4, $M, N, G$  分别是棱  $AA_1, BC, A_1D_1$  的中点,设  $Q$  是该正方体表面上的一点,若  $\overrightarrow{MQ} = x\overrightarrow{MG} + y\overrightarrow{MN} (x, y \in \mathbf{R})$ ,则点  $Q$  的轨迹围成图形的面积是 \_\_\_\_\_,  $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MQ}$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

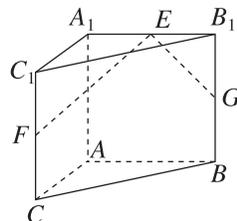


**四、解答题:** 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $E, F, G$  分别为  $A_1B_1, CC_1, BB_1$  的中点, 分别记  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AA_1}$  为  $a, b, c$ .

(1) 用  $a, b, c$  表示  $\vec{EF}, \vec{EG}$ ;

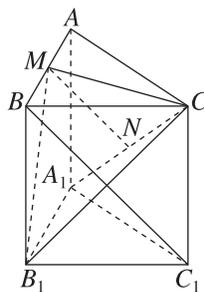
(2) 若  $AB=AC=AA_1=2, AB \perp AC$ , 求  $|\vec{EF}+2\vec{EG}|$ .



16. (15 分) 如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\angle ABC=90^\circ$ ,  $AB=BC=BB_1=2, M, N$  分别是  $AB, A_1C$  的中点.

(1) 求证:  $MN \parallel$  平面  $BCC_1B_1$ ;

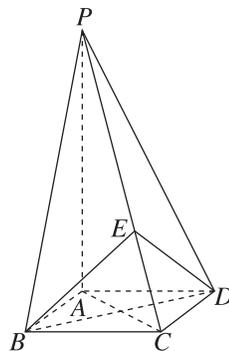
(2) 求直线  $BC_1$  与平面  $MB_1C$  所成角的正弦值.



17. (15 分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 底面四边形  $ABCD$  是正方形,  $PA=2AD$ , 点  $E$  为  $PC$  上的点,  $PE=2EC$ .

(1) 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $BDE$ ;

(2) 若  $AD=1$ , 求点  $C$  到平面  $BDE$  的距离.

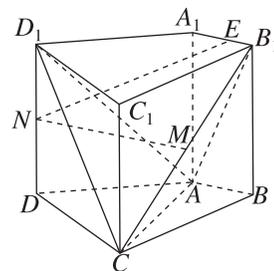


18. (17 分) 如图, 在四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 侧棱  $A_1A \perp$  底面  $ABCD, AB \perp AC, AB=1, AC=AA_1=2, AD=CD=\sqrt{5}$ , 且点  $M$  和  $N$  分别为  $B_1C$  和  $D_1D$  的中点.

(1) 求证:  $MN \parallel$  平面  $ABCD$ ;

(2) 求平面  $ACD_1$  与平面  $ACB_1$  夹角的余弦值;

(3) 设  $E$  为棱  $A_1B_1$  上的点, 若直线  $NE$  和平面  $ABCD$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{3}$ , 求线段  $A_1E$  的长.



19. (17 分) [2024·合肥一中高二期中] 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形, 侧面  $PAD$  为等边三角形, 顶点  $P$  在底面上的射影在正方形  $ABCD$  外部, 设点  $E, F$  分别为  $PA, BC$  的中点.

(1) 证明:  $BE \parallel$  平面  $PDF$ ;

(2) 若四棱锥  $P-ABCD$  的体积为  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ , 设点  $G$  为棱  $PB$  上的一个动点 (不含端点), 求直线  $AG$  与平面  $PCD$  所成角的正弦值的最大值.

